Interrogation (1) du 21 mars 2002
Correction (corrigée)

1. C est donnée par

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \int_0^1 \int_0^x (x^2+3xy)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2y+3xy^2/2\right]_0^x\,dx \\ &= \int_0^1 (x^3+3x^3/2)\,dx = (5/2)\int_0^1 x^3dx = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

2. La densité marginale de Y est

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{8}{5}\int_y^1 (x^2+3xy)dx\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y) \\ &= \frac{8}{5}\left[x^3/3+3yx^2/2\right]_y^1\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y) = \frac{8}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{3y}{2}-\frac{11y^3}{6}\right)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(y) \\ &= 4\,\frac{2+9y-11y^3}{15} \end{aligned}$$

et l'espérance conditionnelle de X sachant $Y=y$ vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y=y] &= 6\int_x^1 x\,\frac{(x^2+3xy)}{2+9y-11y^3}dx \\ &= 6\,\frac{\left[x^4/4+x^3y\right]_y^1}{2+9y-11y^3} = 6\,\frac{\frac{1}{4}+y-\frac{5y^4}{4}}{2+9y-11y^3} \\ &= \frac{3}{2}\,\frac{1+4y-5y^4}{2+9y-11y^3} \end{aligned}$$

3. La fonction de répartition jointe de (X, Y) est

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= C\int_0^a \left\{\int_0^{\min(b,x)} (x^2+3xy)\,dy\right\} dx \\
&= C\int_0^a \left[x^2y+3xy^2/2\right]_0^{\min(b,x)}\,dx \\
&= C\int_0^{\min(a,b)} \frac{5}{2}x^3\,dx + C\,\mathbb{I}_{a>b}\int_b^a (bx^2+3b^2x/2)\,dx \\
&= C\left\{\frac{5}{8}\min(a,b)^4 + \mathbb{I}_{a>b}\left[bx^3/3+3b^2x^2/4\right]_b^a\right\} \\
&= \min(a,b)^4 + \mathbb{I}_{a>b}C\,\left\{ba^3/3+3b^2a^2/4-13b^4/12\right\} \\
&= \begin{cases} a^4 & \text{si } a<b, \\ \frac{8ba^3+18b^2a^2-11b^4}{15} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. La probabilité $P(2X < Y)$ vaut 0 puisque $Y < X$. Il s'agit d'une erreur de frappe, la question initiale et plus dure étant de trouver

$$\begin{aligned}
P(X<2Y) &= C\int_0^1\int_{x/2}^x (x^2+3xy)\,dy\,dx \\
&= C\int_0^1 \left[x^2y+3xy^2/2\right]_{x/2}^x\,dx \\
&= C\int_0^1 x^3\,dx\,\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right] \\
&= \frac{8}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{13}{8} = \frac{13}{20}
\end{aligned}$$

5. La loi du couple (Y, Z) est donnée par la densité

$$C\left((y/z)^2+3(y/z)y\right)\frac{y}{z^2}\mathbb{I}_{0\le y\le y/z\le 1} = C\,y^3\,\frac{1+3z}{z^4}\mathbb{I}_{0\le y\le z\le 1}$$

puisque le Jacobien vaut y/z^2. Donc la loi de Z a comme densité

$$C\,\frac{1+3z}{z^4}\int_0^z y^3\,dy\,\mathbb{I}_{0\le z\le 1} = \frac{2}{5}\,(1+3z)\,\mathbb{I}_{0\le z\le 1}$$

6. Z et Y ne sont pas indépendants à cause de l'indicatrice.