Analyse asymptotique de modèles de fragmentation

S. Mischler

(Paris-Dauphine & IUF)

ÉCOLE D'ÉTÉ
Modélisation en dynamique des populations et évolution
Probabilités et EDP
La Londe-les-Maures, 6-14 Septembre 2012

Flash publicité numéro 1

Cours de niveau MASTER 2 intitulé

"Comportement remarquable d'EDP d'évolution issues de la biologie"

par

Stéphane Mischler

dans le cadre du

Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées

de l'Université Paris-Dauphine

Plan du cours : 7×3h (21h)

- Formulations faibles des EDP d'évolution (3h)
- Equation de Keller-Segel de la Chimiotaxie (9h)
- Equations de Fragmentation (9h)

Les cours commenceront à partir de Mars 2013

Flash publicité numéro 2

Ecole de recherche CIMPA-UNESCO-MESR-MINECO-CUBA

Equations aux Dérivées Partielles en Biologie et Médecine

24 juin-5 juillet 2013, La Havane, Cuba

Quatre cours de

J.A. Carrillo - Aggregation versus Diffusion in Mathematical Biology
O. Diekmann - Delay Equations and Physiologically Structured Populations
Ph. Maini - Mathematical modelling in development and cancer
B. Perthame - Asymptotic analysis of some PDEs arising in biomedicine

Inscription et demande de financement sur le site du CIMPA

lien à partir de ma page web

Plan du cours

Liste de travaux

- M. Escobedo, S.M., M. Rodriguez Ricard, *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models*, Annales IHP (2005)
- Ph. Michel, S.M., B. Perthame, *General relative entropy inequality: an illustration on growth models*, JMPA (2005)
- Ph. Michel, *Existence of a solution to the cell division eigenproblem*, M3AS (2006)
- B. Perthame, *Transport equations in biology*, Birkhäuser Verlag (2007)
- M. Doumic-Jauffret, P. Gabriel, *Eigenelements of a general aggregation-fragmentation model*, M3AS (2010)
- M. P. Gualdani, S. Mischler, C. Mouhot, *Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem*, prépublication ArXiv 2010
- M.J. Caceres, J.A. Cañizo, S. M., *Rate of convergence to an asymptotic profile for the self-similar fragmentation and growth-fragmentation equations*, JMPA (2011)
- M.J. Caceres, J.A. Cañizo, S. M., *Rate of convergence to self-similarity for the fragmentation equation in L^1 spaces*, CAIM (2011)

- J. Bertoin (2001), B. Haas, G. Miermont, J. Berestycki

Plan

Au niveau microscopique toute particule $\{y\}$ de taille/masse $y > 0$ est soumise au mécanisme de fragmentation

$$\{y\} \xrightarrow{b} \{y_1\} + \dots + \{y_n\} + \dots, \qquad y_n > 0, \ \sum_n y_n = y$$

Au niveau mesoscopique/statistique l'évolution de la densité $f = f(t,x) \geq 0$, $t = \text{temps} \geq 0$, $x = \text{taille} \ > 0$, est gouvernée par l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{F} f \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty), \qquad f(0,.) = f_0 \quad x \in (0,\infty)$$

Au niveau microscopique toute particule $\{y\}$ de taille/masse $y > 0$ est soumise au mécanisme de fragmentation

$$\{y\} \xrightarrow{b} \{y_1\} + ... + \{y_n\} + ..., \qquad y_n > 0, \ \sum_n y_n = y$$

Au niveau mesoscopique/statistique l'évolution de la densité $f = f(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille > 0, est gouvernée par l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{F} f = \mathcal{F}^+ f - \mathcal{F}^- f = \text{création} - \text{annihilation}$$

Au niveau microscopique toute particule $\{y\}$ de taille/masse $y > 0$ est soumise au mécanisme de fragmentation

$$\{y\} \xrightarrow{b} \{y_1\} + \ldots + \{y_n\} + \ldots, \qquad y_n > 0, \ \sum_n y_n = y$$

Au niveau mesoscopique/statistique l'évolution de la densité $f = f(t,x) \geq 0$, $t = \text{temps} \geq 0$, $x = \text{taille} \ > 0$, est gouvernée par l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{F} f = \int_x^\infty b(y,x)\, f(y)\, dy - B(x)\, f(x)$$

Au niveau mesoscopique/statistique l'évolution de la densité $f = f(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille > 0, est gouvernée par l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{F} f = \int_x^\infty b(y,x)\, f(y)\, dy - B(x)\, f(x), \qquad f(0,.) = f_0$$

$$B(x) = \text{taux global de fragmentation}$$

$$b(x,y) = \text{taux de fragmentation } x \to y + ... \quad y \in (0,x)$$

$$B(x) = \int_0^x \frac{y}{x}\, b(x,y)\, dy$$

Au niveau mesoscopique/statistique l'évolution de la densité $f = f(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille > 0, est gouvernée par l'équation de fragmentation

$$\partial_t f = \mathcal{F} f = \int_x^\infty b(y,x)\, f(y)\, dy - B(x)\, f(x), \qquad f(0,.) = f_0$$

$$B(x) = \text{taux global de fragmentation}$$

$$b(x,y) = \text{taux de fragmentation } x \to y + \dots \quad y \in (0,x)$$

$$B(x) = \int_0^x \frac{y}{x}\, b(x,y)\, dy$$

Nous supposerons toujours que le taux de fragmentation est constant en la variable "taille de la particule fille/taille de la particule mère"

$$b(x,y) := B(x)\, \frac{1}{x}\, \vartheta\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad \int_0^1 z\, \vartheta(z)\, dz = 1, \quad \vartheta \text{ régulier}$$

Propriétés fondamentales de l'opérateur de Fragmentation et de l'équation de Fragmentation

L'operateur "conserve" la masse des particules

$$\langle \mathcal{F} f, x \rangle = 0$$

L'operateur "crée" des particules

$$\langle \mathcal{F} f, 1 \rangle > 0$$

$$\langle \mathcal{F} f, x^2 \rangle < 0$$

car pour toute fonction ϕ, on a l'identité

$$\langle \mathcal{F} f, \phi \rangle = \int_0^\infty f(x) \int_0^x b(x,y) \left[\phi(y) - \frac{y}{x}\, \phi(x)\right] dydx \qquad (*1)$$

Propriétés fondamentales de l'opérateur de Fragmentation et de l'équation de Fragmentation

L'équation conserve la masse des particules

$$\int_0^\infty f(t,x)\,x\,dx = \int_0^\infty f_0(x)\,x\,dx = 1 \qquad (*1)$$

L'équation crée des particules

$$\int_0^\infty f(t,x)\,dx \nearrow, \qquad \int_0^\infty f(t,x)\,x^2\,dx \searrow \qquad (*1)$$

puisque

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(t,x)\,x^k\,dx = \langle \mathcal{F} f(t,.), x^k \rangle \qquad (*1)$$

Propriétés fondamentales de l'opérateur de Fragmentation et de l'équation de Fragmentation

L'équation conserve la masse des particules

$$\int_0^\infty f(t,x)\, x\, dx = \int_0^\infty f_0(x)\, x\, dx = 1$$

L'équation crée des particules

$$\int_0^\infty f(t,x)\, dx \nearrow, \qquad \int_0^\infty f(t,x)\, x^2\, dx \searrow$$

$\Rightarrow$ Si "$b > 0$" le comportement en temps long est: "toutes les particules finissent sous forme de poussière"

$$f(t,x)\, x \rightharpoonup \rho\, \delta_0 \text{ lorsque } t \to \infty, \quad \rho \in [0,1]$$

Peut-on être plus précis?

Supposons que le taux de fragmentation total est homogène :

$$B(x) = B_0\, x^\gamma, \qquad 0 < \gamma < 2,\ B_0 > 0$$

Supposons que le taux de fragmentation total est homogène :

$$B(x) = B_0\, x^\gamma, \qquad 0 < \gamma < 2,\ B_0 > 0$$

On remarque qu'une fonction *auto-similaire* de masse constante

$$F(t,x) = t^{2/\gamma}\, G(t^{1/\gamma}\, x)$$

est solution de l'équation de Fragmentation si, et seulement si, le profil (*auto-similaire*) G satisfait l'équation stationnaire

$$\gamma \mathcal{F} G - \mathcal{D} G = 0, \qquad \mathcal{D} g := x\, \partial_x g + 2\, g \qquad (*2)$$

Supposons que le taux de fragmentation total est homogène :

$$B(x) = B_0\, x^\gamma, \qquad 0 < \gamma < 2,\ B_0 > 0$$

On remarque qu'une fonction *auto-similaire* de masse constante

$$F(t,x) = t^{2/\gamma}\, G(t^{1/\gamma}\, x)$$

est solution de l'équation de Fragmentation si, et seulement si, le profil (*auto-similaire*) G satisfait l'équation stationnaire

$$\gamma \mathcal{F} G - \mathcal{D} G = 0, \qquad \mathcal{D} g := x\, \partial_x g + 2\, g \qquad (*2)$$

Théorème 1F. Escobedo, M., Rodriguez Ricard

Il existe un unique profil auto-similaire G satisfaisant

$$\gamma \mathcal{F} G - \mathcal{D} G = 0, \quad G > 0, \quad \langle G, x \rangle = 1.$$

$\Rightarrow$ Comportement asymptotique de F est

$$F(t,x)\, x = t^{1/\gamma}\, G(t^{1/\gamma} x)\, t^{1/\gamma} x \ \rightharpoonup\ \delta_0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

Si f est solution de l'équation de Fragmentation, alors la nouvelle fonction

$$g(t,x) := e^{-2t}\, f\,(e^{\gamma\, t} - 1, x\, e^{-t})$$

est solution de l'équation de fragmentation en variables auto-similaires

$$\partial_t g = \gamma \mathcal{F}\, g - \mathcal{D} g$$

dont G est solution stationnaire

Si f est solution de l'équation de Fragmentation, alors la nouvelle fonction

$$g(t,x) := e^{-2t} f\,(e^{\gamma\, t} - 1, x\, e^{-t})$$

est solution de l'équation de fragmentation en variables auto-similaires

$$\partial_t g = \gamma \mathcal{F}\, g - \mathcal{D} g$$

dont G est solution stationnaire

Si on sait montrer que

$$g(t,\cdot) \;\to\; G \;\text{ lorsque }\; t \to \infty$$

alors en revenant aux variables initiales, on prouve

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (1+t)^{\frac{2}{\gamma}} g\Big(\frac{1}{\gamma}\ln(1+t), (1+t)^{\frac{1}{\gamma}}\, y\Big) \\ &\approx (1+t)^{\frac{2}{\gamma}} G\Big((1+t)^{\frac{1}{\gamma}}\, x\Big) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Toute solution est *asymptotiquement auto-similaire*

L'évolution de la densité satistique $n = n(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille/masse d'une particule/cellule > 0, est gouvernée par l'équation de croissance-fragmentation

$$\partial_t n + \partial_x n = \mathcal{F} n, \quad B(x) \sim x^\gamma, \quad 0 < \gamma < 2$$

L'évolution de la densité satistique $n = n(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille/masse d'une particule/cellule > 0, est gouvernée par l'équation de croissance-fragmentation

$$\partial_t n + \partial_x n = \mathcal{F} n, \quad B(x) \sim x^\gamma, \quad 0 < \gamma < 2$$

La dynamique ne conserve plus la masse, mais

Théorème 1CF. Paramètres Malthusiens de l'équation de Croissance-Fragmentation (de type Krein-Rutman) Michel, M., Perthame, Doumic, Gabriel

Il existe une unique solution (λ, G, ϕ) aux problèmes aux valeurs propres avec $\lambda > 0$, G fonction densité, ϕ fonction poids

$$\begin{cases} \partial_x G + \lambda\, G = \mathcal{F} G, \quad G(0) = 0, \quad G > 0, \quad \langle G, 1 \rangle = 1 \\ -\partial_x \phi + \lambda\, \phi = \mathcal{F}^* \phi, \quad \phi > 0, \quad \langle G, \phi \rangle = 1 \end{cases} \tag{1}$$

L'équation de Croissance-Fragmentation et paramètre Malthusien

L'évolution de la densité satistique $n = n(t,x) \geq 0$, $t =$ temps ≥ 0, $x =$ taille/masse d'une particule/cellule > 0, est gouvernée par l'équation de croissance-fragmentation

$$\partial_t n + \partial_x n = \mathcal{F} n, \quad B(x) \sim x^\gamma, \quad 0 < \gamma < 2$$

La dynamique ne conserve plus la masse, mais

Théorème 1CF. Paramètres Malthusiens de l'équation de Croissance-Fragmentation (de type Krein-Rutman) Michel, M., Perthame, Doumic, Gabriel

Il existe une unique solution (λ, G, ϕ) aux problèmes aux valeurs propres avec $\lambda > 0$, G fonction densité, ϕ fonction poids

$$\begin{cases} \partial_x G + \lambda\, G = \mathcal{F} G, \quad G(0) = 0, \quad G > 0, \quad \langle G, 1 \rangle = 1 \\ -\partial_x \phi + \lambda\, \phi = \mathcal{F}^* \phi, \quad \phi > 0, \quad \langle G, \phi \rangle = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Cela implique

$$\langle n(t,.), \phi \rangle = e^{\lambda\, t} \langle n(0,.), \phi \rangle, \qquad (*3)$$

mais peut-on être plus précis?

Si n est solution de l'équation de Croissance-Fragmentation, alors la nouvelle fonction

$$g(t,x) := n(t,x)\, e^{-\lambda\, t}$$

est solution de l'équation de Croissance-Fragmentation en variables mathusiennes

$$\partial_t g = \mathcal{F}\, g - \partial_x g - \lambda\, g$$

dont G est solution stationnaire

Si n est solution de l'équation de Croissance-Fragmentation, alors la nouvelle fonction

$$g(t,x) := n(t,x)\, e^{-\lambda\, t}$$

est solution de l'équation de Croissance-Fragmentation en variables mathusiennes

$$\partial_t g = \mathcal{F}\, g - \partial_x g - \lambda\, g$$

dont G est solution stationnaire

Si on sait montrer que

$$g(t,\cdot) \ \to \ G \ \text{ lorsque } \ t \to \infty$$

alors en revenant aux variables initiales, on prouve

$$\begin{aligned} n(t,x) \ &= \ e^{\lambda\, t}\, g(t,x) \\ &\approx \ e^{\lambda\, t}\, G(x) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Toute solution est *asymptotiquement malthusienne*

Les deux modèles en nouvelles variables peuvent s'écrire sous la forme de l'équation

$$\partial_t g + a(x)\,\partial_x g + \lambda\, g = \mathcal{F}\, g$$

à laquelle on peut associer un couple (G,ϕ) de profil remarquable et poids remarquable

$$\begin{cases} \quad a(x)\,\partial_x G + \lambda\, G = \mathcal{F} G, \qquad G > 0, \\ -\partial_x(a(x)\,\phi) + \lambda\,\phi = \mathcal{F}^*\phi, \quad \phi > 0, \quad \langle G,\phi\rangle = 1 \end{cases}$$

Les deux modèles en nouvelles variables peuvent s'écrire sous la forme de l'équation

$$\partial_t g + a(x)\,\partial_x g + \lambda\, g = \mathcal{F}\, g$$

à laquelle on peut associer un couple (G, ϕ) de profil remarquable et poids remarquable

$$\begin{cases} \quad a(x)\,\partial_x G + \lambda\, G = \mathcal{F} G, \qquad G > 0, \\ -\partial_x(a(x)\,\phi) + \lambda\,\phi = \mathcal{F}^*\phi, \quad \phi > 0, \quad \langle G, \phi\rangle = 1 \end{cases}$$

Pour l'equation de Fragmentation auto-similaire, on change $B_0 \to B_1 := \gamma\, B_0$, on prend

$$\phi(x) = a(x) = x, \qquad \lambda = 2,$$

et on observe que $-\partial_x(a(x)\,\phi) + \lambda\,\phi = \mathcal{F}^*\phi = 0.$ $\qquad (*4)$

Entropie relative généralisée (GRE)

Etant données deux solutions g_1 et g_2 de l'équation

$$\partial_t g_i + a(x)\,\partial_x g_i + \lambda\, g_i = \mathcal{F}\, g_i,$$

et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty h\Big(\frac{g_2(t,x)}{g_1(t,x)}\Big)\, g_1(t,x)\,\phi(x)\,dx =$$
$$= -\int_0^\infty\int_0^\infty b(y,x)\,\phi(x)\,g_1(t,y)\,\Delta_h(t,x,y)\,dxdy, \qquad (*5)$$

où

$$\Delta_h := h(u(t,y)) - h(u(t,x)) - h'(u(t,x))\,(u(t,y)-u(t,x)) \ge 0$$

et

$$u(t,x) := \frac{g_2(t,x)}{g_1(t,x)}.$$

$$\partial_t[h(\frac{g}{G})G\phi]$$
$$+\partial_x[a\,h(\frac{g}{G})G\phi] + \phi\mathcal{L}[h(\frac{g}{G})G] - h(\frac{g}{G})G\,\mathcal{L}^*\phi$$
$$= \int_{\mathbb{R}} b(y,x)\phi(x)G(y)\Big\{h(\frac{g}{G}(x)) - h(\frac{g}{G}(y)) + h'(\frac{g}{G}(x))(\frac{g}{G}(y) - \frac{g}{G}(x))\Big\}dy$$

vraie pour toutes fonctions g, G et ϕ telles que

$$\partial_t g + \partial_x(a\,g) + A\,g = \mathcal{L}\,g$$
$$\partial_t G + \partial_x(a\,G) + A\,G = \mathcal{L}\,G$$
$$-\partial_t\phi - a\,\partial_x\phi + A\,\phi = \mathcal{L}^*\phi$$

avec

$$(\mathcal{L}g)(x) = \int_{\mathbb{R}} b(y,x)\,g(y)\,dy, \qquad (\mathcal{L}^*\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} b(x,y)\,\phi(y)\,dy$$

En prenant $h(s) := |s-1|$ on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty |g_2(t,x) - g_1(t,x)|\,\phi(x)\,dx \le 0.$$

Théorème 0. Caractère bien posé.

Pour toute donnée initiale $0 \le g_{in} \in L^1_2$, il existe une unique solution positive $g \in C([0,\infty; L^1_2)$ de l'équation CF et celle-ci vérifie la conservation

$$\int_0^\infty g(t,x)\,\phi(x)\,dx = \int_0^\infty g_{in}(x)\,\phi(x)\,dx = 1.$$

On note

$$L^1_2 := L^1(\mathbb{R}_+, (1+x^2)\,dx).$$

En prenant $h_1(s) := |s-1|$ et $h_2(s) := (s-1)^2$, on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty |g(t,x) - G(x)|\,\phi(x)\,dx \le 0$$

et

$$\frac{d}{dt}H_2(g(t,.)) = -D_2(g(t,.)) \le 0$$

avec

$$\begin{aligned} H_2(g) &:= \int_0^\infty (g-G)^2\,G^{-1}\,dx \\ D_2(g) &:= \int_0^\infty\int_0^\infty b(y,x)\,\phi(x)\,G(y)\left(\frac{g(x)}{G(x)} - \frac{g(y)}{G(y)}\right)^2 dxdy \end{aligned}$$

Théorème 2. Convergence vers l'équilibre.
Escobedo, Michel, M., Perthame, Rodriguez

La solution satisfait

$$g(t,\cdot)\,\phi \;\to\; G\,\phi \quad \text{dans} \quad L^1 \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

En prenant $h_1(s) := |s-1|$ et $h_2(s) := (s-1)^2$, on trouve

$$\frac{d}{dt} H_k(g(t,.)) \le 0$$

avec

$$H_k(g) \quad := \quad \int_0^\infty |g - G|^k \, G^{1-k} \, dx$$

Théorème 2. Convergence vers l'équilibre.
Escobedo, Michel, M., Perthame, Rodriguez

La solution satisfait

$$g(t,\cdot)\,\phi \ \to \ G\,\phi \quad \text{dans} \quad L^1 \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

et en revenant aux variables initiales

$$f(t,x) \quad \approx \quad (1+t)^{\frac{2}{\gamma}} G\Big((1+t)^{\frac{1}{\gamma}}\,x\Big) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

$$n(t,x) \quad \approx \quad e^{\lambda\,t}\,G(x) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty$$

Dernière question: peut-on établir un taux de convergence ?

Taux de convergence exponentielle vers le profil remarquable dans l'espace L^2 muni du bon poids

Théorème 4. Convergence exponentielle dans $E := L^2(\phi\, G^{-1})$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall\, g \in E$ telle que $\langle g_0, \phi\rangle = \langle G, \phi\rangle = 1$, on a

$$\frac{1}{\lambda}\, D_2(g) \geq H_2(g) = \|g - G\|_E^2.$$

$\Rightarrow$ convergence exponentielle

$$\|g - G\|_E \leq e^{a\,t}\|g_0 - G\|_E, \qquad a := -\lambda/2.$$

Taux de convergence exponentielle vers le profil remarquable dans l'espace L^2 muni du bon poids

Théorème 4. Convergence exponentielle dans $E := L^2(\phi\, G^{-1})$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall\, g \in E$ telle que $\langle g_0, \phi \rangle = \langle G, \phi \rangle = 1$, on a

$$\frac{1}{\lambda}\, D_2(g) \geq H_2(g) = \|g - G\|_E^2.$$

$\Rightarrow$ convergence exponentielle

$$\|g - G\|_E \leq e^{a\,t} \|g_0 - G\|_E, \qquad a := -\lambda/2.$$

Conséquence immédiate de l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt} H_2(g) = -D_2(g) \leq -\lambda\, H_2(g).$$

Théorème 4. Convergence exponentielle dans $E := L^2(\phi\, G^{-1})$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall\, g \in E$ telle que $\langle g_0, \phi\rangle = \langle G, \phi\rangle = 1$, on a

$$\frac{1}{\lambda}\, D_2(g) \geq H_2(g) = \|g - G\|_E^2.$$

$\Rightarrow$ convergence exponentielle

$$\|g - G\|_E \leq e^{a\,t}\|g_0 - G\|_E, \qquad a := -\lambda/2.$$

Or

$$\phi(x)\, G^{-1}(x) \sim e^{\kappa\, x^s} \quad \text{lorsque} \quad x \to \infty, \quad \text{avec} \quad \kappa, s > 0$$

$\Rightarrow$ E est très petit. Le résultat est très restrictif en termes de données initiales.

Théorème 5. Convergence exponentielle dans $\mathcal{E} := L^1(\psi)$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe une constante $a < 0$ ($a \sim -\lambda/2$) telle que

$$\|g - G\|_{\mathcal{E}} \le C\, e^{a\,t} \|g_0 - G\|_{\mathcal{E}}, \quad \text{si} \quad \langle g_0, \phi \rangle = 1$$

avec

$$\psi(x) := x^m\, \mathbf{1}_{x \le 1} + x^M\, \mathbf{1}_{x \ge 1}, \quad m < 1 < M, \quad \text{(Fragmentation)}$$

Théorème 5. Convergence exponentielle dans $\mathcal{E} := L^1(\psi)$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe une constante $a < 0$ ($a \sim -\lambda/2$) telle que

$$\|g - G\|_{\mathcal{E}} \le C\, e^{a\,t} \|g_0 - G\|_{\mathcal{E}}, \quad \text{si} \quad \langle g_0, \phi \rangle = 1$$

avec

$$\psi(x) := x^m\, \mathbf{1}_{x\le 1} + x^M\, \mathbf{1}_{x\ge 1}, \quad m < 1 < M, \quad \text{(Fragmentation)}$$

idée: extension du trou spectral d'un espace E dans un espace $\mathcal{E} \supset E$ en utilisant la structure

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \mathcal{F} - x\,\partial_x - 2 \\ &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to E$ et le semi-groupe associé à $\mathcal{B}$ décroît dans $\mathcal{E}$

Taux de convergence exponentielle vers le profil remarquable dans des espaces L^1 avec poids polynomial

Théorème 5. Convergence exponentielle dans $\mathcal{E} := L^1(\psi)$
Cáceres, Cañizo, M.

Il existe une constante $a < 0$ ($a \sim -\lambda/2$) telle que

$$\|g - G\|_{\mathcal{E}} \le C\, e^{a\,t} \|g_0 - G\|_{\mathcal{E}}, \quad \text{si} \quad \langle g_0, \phi \rangle = 1$$

avec

$$\psi(x) := x^m\, \mathbf{1}_{x \le 1} + x^M\, \mathbf{1}_{x \ge 1}, \quad m < 1 < M, \quad \text{(Fragmentation)}$$

Problème ouvert:

Peut-on démontrer les Théorèmes 4 & 5 lorsque $\gamma \ge 2$?

Plan

Existence, conservation, concentration

(1) Définition d'une solution

(2) Bornes M_1, M_2, M_0 (sur g)

(3) Existence, positivité et conservation (sur f)

(4) Concentration en 0 de f $=$ les particules finissent totalement en poussière !

(5) Si $\gamma < 0$ pas de conservation : création instantanée de poussière !

Plan

Profil

(1) Bornes sur g

(2) Existence de G

(3) Bornes sur G

Profil

(1) Bornes sur g

(2) Existence de G

Lemme de type Poincaré-Bendixson

Soit Y un espace de Banach et $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-goupe continu sur Y tel que

(i) $S_t : Y \to Y$ est faiblement continu pour tout $t > 0$,

(ii) Il existe $\mathcal{C} \neq \emptyset$ un convexe faiblement compact de Y invariant par l'action de S_t (i.e. $S_t g_0 \in \mathcal{C}, \forall\, g_0 \in \mathcal{C},\ t \geq 0$).

$\Rightarrow$ Il existe $G \in \mathcal{C}$ point invariant par S_t: $S_t G = G, \forall\, t \geq 0$.

(3) Bornes sur G

Profil

(1) Bornes sur g

(2) Existence de G

(3) Bornes sur G

Théorème 3. Estimations fines sur G
Escobedo, M., Rodriguez, Cáceres, Cañizo, M. (Fragmentation)
Michel, M., Perthame, Doumic, Gabriel, Cáceres, Cañizo (Croissance-Fragmentation)

Il existe $a_i > 0$ tels que

$$G(x) \geq a_1(\delta)\, e^{-a_2\, x^\gamma} \quad \forall\, x \geq \delta > 0,$$
$$G(x) \leq a_3\, e^{-a_4\, x^\gamma} \quad \forall\, x > 0,$$

Plan

Plan

Plan