

## Équation de Boltzmann quantique homogène: existence et comportement asymptotique\*.

\* *Version précisée du texte soumis à publication. Les modifications apparaissent en italique.*

Miguel ESCOBEDO <sup>a</sup>, Stéphane MISCHLER <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco. Apartado 644, Bilbao. E48080.

<sup>b</sup> Laboratoire de Mathématiques Appliquées, bâtiment Fermat, Université de Versailles. Versailles Cedex F78035.

**Résumé.** Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de Boltzmann quantique homogène décrivant l'interaction photons-électrons. Nous étudions le comportement asymptotique des solutions, et nous montrons, en particulier, que la densité de photons se condense à l'origine en temps infini lorsque le nombre de photons est suffisamment grand.

**Homogeneous quantic Boltzman equation: existence and asymptotic behaviour.**

**Abstract.** We prove existence and uniqueness of the solution of a homogeneous quantic Boltzman equation describing the photon-electron interaction. We study the asymptotic behaviour of the solutions, and show in particular, that the photon density distribution condensates at the origin asymptotically in time when the total number of photons is larger than a given positive constant.

*Abridged English Version.* We consider the homogeneous Boltzmann equation

$$(1.1) \quad k^2 \frac{\partial f}{\partial t} = Q(f, f) = \int_0^\infty (f'(1+f) B(k', k; \theta) - f(1+f') B(k, k'; \theta)) dk',$$

which describes the dynamics of a low energy, homogeneous, isotropic photon gas interacting with a low energy, low temperature electron gas with a Maxwellian distribution of velocities via Compton scattering (see [6], [3], [2]) where  $f = f(t, k) \geq 0$  is the photon density which at time  $t \geq 0$  have energy  $k > 0$  and we set  $f' = f(t, k')$ . The first term of the right hand side of equation (1.1) represents the rate at which a particle with energy  $k'$  at time  $t$  changes its energy to  $k$  due to a collision. The scattering rate  $B(k, k'; \theta)/k^2$  represents the transition probability to be scattered from the state  $k$  to the state  $k'$ . The detailed balance implies that it satisfies  $e^{k/\theta} B(k', k; \theta) = e^{k'/\theta} B(k, k'; \theta)$ . In all the following we take  $\theta = 1$  and denote  $k^2 k'^2 b(k, k') = B(k', k; 1) e^k$  where  $b$  is a symmetric continuous function. For the sake of brevity, we consider in this note the simple case where, for some positive constants  $b^*$  and  $b_*$ , one has  $b^* \leq b \leq b_*$  or even sometimes  $b$  constant. More general cases are discussed in [5].

An important property of the equation (1.1) is that, at least formally, the total number of photons, given by  $N(f) = \int_0^\infty k^2 f(k, t) dk$  is constant in time. Another important property is that the "entropy"  $S(f) = \int_0^\infty s(f(t, k), k) k^2 dk$ , with  $s(x, k) = (1+x) \ln(1+x) - x \ln x - kx$  is increasing in time. It is known (see for instance [1]) that the functions:

$$f_\mu(k) = \frac{1}{e^{k+\mu} - 1},$$

with  $\mu \geq 0$  are stationary solutions of the equation and that, moreover  $S(f_\mu) = \max_{N(f)=N_\mu} S(f)$ , for  $\mu > 0$  and  $S(f_0) = \max S(f)$ . R. E. Caflisch and C. D. Levermore observed in [1] that

one can extend the definition of the entropy  $S$  to distributions  $f$  of the form  $k^2 f = g + \alpha \delta_a$  with  $g \in L^1(0, +\infty)$  and  $\alpha > 0$ . We show that the equation (1.1) itself makes sense for such distributions. Denoting  $F(k, t) = k^2 f(k, t) + \alpha(t) \delta_a \equiv g + \alpha(t) \delta_a$ , we can rewrite the equation as a coupled system for the pair  $(g, \alpha)$  (see (2.2) below). We first consider the equilibrium states and the stationary problem and show in particular that the stationary solutions with mass  $m$  are

$$\mathcal{B}_m = \frac{k^2}{e^{k+\mu} - 1} + \alpha \delta_0 \equiv k^2 f_\mu + \alpha \delta_0$$

with,  $\alpha = 0$ ,  $\mu$  such that  $N(f_\mu) = m$  when  $m \leq N(f_0)$ , and  $\alpha = m - N(f_0)$ ,  $\mu = 0$  when  $m > N(f_0)$ . (See Théorème 2 below).

With regard to the evolution problem, we prove that for any initial data  $F_{in}$  such that  $\int k dF(k) < +\infty$ , there exists a unique global solution  $F = (g, \alpha)$  of system (2.2) such that  $\int k dF(k, t) < +\infty$  for all  $t > 0$ . Finally, we show that if the mass of the data is  $m$  the solution satisfies  $F(t, \cdot) \rightharpoonup \mathcal{B}_m$  in  $\sigma(M^1, C_c)$  weak  $\star$  and  $g(t, \cdot) \rightarrow g_\mu$  in  $L^1([k_0, +\infty))$  for every  $k_0 > 0$  when  $t \rightarrow +\infty$ . Observe that if the initial data is regular, i.e.  $F_{in} = g_{in} \in L^1(\mathbf{R}^N)$ , then the solution is regular,  $F(t, \cdot) = g(t, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}^N)$  for all  $t > 0$ . If the initial mass is such that  $m > N(f_0)$  then this solution converges to the condensated state  $\mathcal{B}_m = k^2 f_0 + (m - N(f_0)) \delta_0$  as  $t \rightarrow +\infty$ . That is, the photon density distribution condensates at the origin asymptotically in time.

## 1. Introduction.

On s'intéresse à un gaz de photons isotrope et homogène, décrit par la densité  $f = f(t, k) \geq 0$  de photons qui à l'instant  $t \geq 0$  possèdent l'énergie  $k > 0$ . Nous supposons que les photons sont à basse énergie et interagissent par "scattering Compton" avec un gaz d'électrons de basse énergie, basse température  $\theta > 0$  et à l'équilibre Maxwellien  $e^{-k/\theta}$ . La dynamique du gaz de photons est alors décrite par l'équation de Boltzmann

$$(1.1) \quad k^2 \frac{\partial f}{\partial t} = Q(f, f) = \int_0^\infty (f' (1 + f) B(k', k; \theta) - f (1 + f') B(k, k'; \theta)) dk',$$

(voir [2], [3], [6]) où l'on a noté  $f' = f(t, k')$ . La section efficace  $B(k, k'; \theta)/k^2$  représente la probabilité de transition par scattering de l'état d'énergie  $k$  à l'état d'énergie  $k'$ . Le bilan détaillé implique que la section efficace vérifie  $e^{k/\theta} B(k', k; \theta) = e^{k'/\theta} B(k, k'; \theta)$ . Par la suite on prendra  $\theta = 1$  et nous noterons  $k^2 k'^2 b(k, k') = B(k', k; 1) e^k$ , où  $b$  est donc une fonction continue et symétrique. De plus, dans le but de simplifier au maximum l'exposé nous ferons, dans cette note, l'hypothèse qu'il existe  $b_*, b^* \in (0, \infty)$  tels que  $b_* \leq b(k, k') \leq b^* \forall k, k' \geq 0$  ou même  $b$  constant. On trouvera dans [5] les démonstrations détaillées des résultats pour des sections efficaces plus générales.

Pour une fonction de densité  $f$  on définit le nombre de photons  $N(f)$  et l'entropie  $S(f)$  par

$$(1.2) \quad N(f) = \int_0^\infty f(k) k^2 dk \quad \text{et} \quad S(f) = \int_0^\infty s(f(t, k), k) k^2 dk,$$

où la densité d'entropie est définie par  $s(x, k) = (1 + x) \ln(1 + x) - x \ln x - k x$ . On vérifie alors, au moins formellement, que pour toute solution  $f$  de (1.1) on a

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} N(f(t, \cdot)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} S(f(t, \cdot)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Il est alors naturel de penser que les états d'équilibre de (1.1) sont les états qui maximisent l'entropie à nombre de photons donné. Introduisons les distributions de Bose-Einstein (cas  $\mu > 0$ ) et de Planck (cas  $\mu = 0$ ) définies par

$$(1.4) \quad f_\mu(k) = \frac{1}{e^{k+\mu} - 1},$$

et posons  $N_\mu = N(f_\mu)$ . On vérifie aisément que les  $f_\mu$  sont ordonnées: ( $f_\nu < f_\mu$  si  $\nu > \mu$ ), que ce sont des solutions stationnaires de (1.1) ( $Q(f_\mu, f_\mu) = 0$ ) et que  $f_\mu$  est solution du problème de maximisation

$$(1.5) \quad S(f_\mu) = \max_{N(f)=N} S(f),$$

avec  $\mu$  défini par  $N_\mu = N$  lorsque  $N \leq N_0$ . De plus,  $f_0$  est le maximum global de l'entropie, i.e.  $S(f_0) = \max S(f)$  et satisfait  $N(f_0) < \infty$ . On peut alors se demander si le problème de maximisation (1.5) admet une solution pour  $N > N_0$ . R.E. Caflisch et C.D. Levermore ont résolu ce problème dans [1], en remarquant que si  $\varphi_n$  est une approximation régulière de  $\delta_a$  (avec  $a \geq 0$ ) on a

$$(1.6) \quad S(f + \alpha \varphi_n/k^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(f) - \alpha a.$$

Pour exprimer précisément ce résultat faisons le changement d'inconnue  $g = k^2 f$  et considérons une distribution de particules  $F$  de la forme  $F = g + \alpha \delta_a$  avec  $g \in L^1_+(\mathbb{R}_+)$  et  $\alpha \geq 0$ . Compte tenu de (1.6), on peut étendre la définition (1.2) du nombre de photons et de l'entropie à une distribution  $F$  en posant

$$(1.7) \quad M(F) = \int_0^\infty dF(k) = M(g) + \alpha \quad \text{et} \quad H(F) = H(g) - \alpha a,$$

où  $H(g) = \int_0^\infty h(g, k) dk$ ,  $h(x, k) = (k^2 + x) \ln(k^2 + x) - x \ln x - k^2 \ln k^2 - kx$ .

Définissons enfin les distributions de Bose

$$(1.8) \quad \mathcal{B}_m = g_\mu \text{ avec } M(g_\mu) = m \text{ si } m \leq N_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_m = g_0 + \alpha \delta_0 \text{ avec } \alpha = m - N_0 \text{ si } m > N_0.$$

Avec ces notations, le résultat de R.E. Caflisch et C.D. Levermore s'écrit

**Théorème 1 ([1]).** Pour tout  $m > 0$  on a  $H(\mathcal{B}_m) = \max_{M(F)=m} H(F)$ .

## 2. Nouveaux résultats.

Au vu du Théorème 1 l'espace naturel pour les solutions du problème (1.1) est l'espace des états de la forme  $F = g + \alpha \delta_a \geq 0$ . Par la suite on note  $\mathcal{E}_1$  l'espace de ces distributions telles que  $M((1+k)F) < \infty$ . Avec le changement d'inconnue  $g = k^2 f$  l'équation (1.1) devient

$$(2.1) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \mathcal{Q}(g, g) = \int_0^\infty b(k, k') (g'(k^2 + g) e^{-k} - g(k'^2 + g') e^{-k'}) dk'.$$

Il est alors clair que  $\mathcal{Q}(F, F)$  a encore un sens pour une mesure  $F$  bornée positive définie sur  $[0, +\infty)$ . En particulier, l'équation (2.1) s'écrit, dans le cas d'un état  $F = g + \alpha \delta_a$ , sous la forme du système

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = \mathcal{Q}(g, g) + \alpha b(k, a) [(k^2 + g) e^{-k} - g e^{-a}], \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha [e^{-a} L_a(g) - L_a((k^2 + g) e^{-k})], \end{cases}$$

avec  $L_k(g) := \int_0^\infty b(k, k') g' dk'$ , auquel il convient d'ajouter une donnée initiale

$$F(0, \cdot) = g(0, \cdot) + \alpha(0) \delta_a = F_{in} = g_{in} + \alpha_{in} \delta_a.$$

Pour ce système, on a encore conservation du nombre de photons et croissance de l'entropie, pour tout  $t \geq 0$

$$(2.3) \quad M(F) = M(F_{in}), \quad H(F) - H(F_{in}) = \int_0^t \left[ \int_0^\infty h'(g(k), k) \frac{\partial g}{\partial t} dk - a \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] ds = \int_0^t \frac{D(F)}{2} ds,$$

où le terme de dissipation d'entropie  $D(F)$  se décompose en  $D(F) = D(g) + 2\alpha D_a(g)$ , avec

$$\begin{aligned} D(g) &:= \int_0^\infty \int_0^\infty b(k, k') ((k^2 + g) g' e^{-k} - g (k'^2 + g') e^{-k'}) \\ &\quad (\ln((k^2 + g) g' e^{-k}) - \ln(g (k'^2 + g') e^{-k'})) dk dk' \geq 0, \\ D_a(g) &:= \int_0^\infty b(k, a) ((k^2 + g) e^{-k} - g e^{-a}) (\ln(k^2 + g) e^{-k} - \ln(g e^{-a})) dk \geq 0. \end{aligned}$$

En ce qui concerne le problème stationnaire nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 2.** Pour une distribution  $F = g + \alpha \delta_a$  de masse  $M(F) = m$ , les différentes assertions suivantes sont des caractérisations de  $F = \mathcal{B}_m$

- (2.4)  $F$  maximise l'entropie à masse donnée  $m$ ,  
(2.5)  $Q(F, F) = 0$ ,  
(2.6)  $D(F) = 0$ .

On étudie ensuite le problème d'évolution.

**Théorème 3.** Pour toute donnée initiale  $F_{in} = g_{in} + \alpha_{in} \delta_0 \in \mathcal{E}_1$  il existe un unique  $F = g + \alpha \delta_0 \in C([0, \infty), \mathcal{E}_1)$  solution du système (2.2). Si  $\alpha(0) = 0$ , i.e.  $F_{in} \in L^1(\mathbf{R}_+)$ , alors  $\alpha(t) = 0$  pour tout  $t > 0$  et donc  $F \in L^1(\mathbf{R}_+)$  pour tout  $t > 0$ . De plus, en notant  $m = M(F_{in})$ , la solution vérifie  $F(t, \cdot) \rightharpoonup \mathcal{B}_m$  dans  $\sigma(M^1, C_c)$  faible  $\star$  et  $g(t, \cdot) \rightarrow g_\mu$  dans  $L^1([k_0, \infty))$  fort (pour tout  $k_0 > 0$ ) lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Remarque 1.** Soulignons deux conséquences du Théorème 3. Si l'on part d'une donnée initiale "régulière"  $F_{in} = g_{in} \in L^1(\mathbf{R}_+)$  la solution reste régulière pour tout temps:  $F(t) \equiv g(t) \in L^1(\mathbf{R}_+) \quad \forall t > 0$ . De plus, si  $m = M(F_{in}) = M(g_{in}) > N_0$  alors  $F(t, \cdot) \equiv g(t, \cdot) \rightharpoonup \mathcal{B}_m$  avec  $\mathcal{B}_m = f_0 + \alpha \delta_0$  et  $\alpha = m - N_0 > 0$ , i.e. un état régulier de masse supérieure à  $N_0$  "condense à l'origine" en temps infini.

**Remarque 2.** L'équation (1.1) est souvent approchée dans la littérature physique par l'équation de type Fokker Planck suivante, appelée équation de Kompaneets,

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial t} = K(f) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) \right] \quad \text{pour } x, t > 0 \quad \text{et} \quad x^4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f + f^2 \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0, \infty} 0.$$

Voir par exemple [6], [2]. Nous montrons dans [5] que pour une fonction  $f$  donnée, il existe une famille d'opérateurs de collisions  $Q_\varepsilon(f, f)$  du type de celui qui intervient dans l'équation (1.1) et pour lesquels effectivement  $Q_\varepsilon(f, f) \rightarrow K(f)$ . Cependant il est aussi montré dans [4] que l'équation de Kompaneets possède des solutions telles que  $x^2 f(t, \cdot) \in L^1(0, +\infty)$  pour tout  $t > 0$ ,

de masse aussi petite que l'on veut mais pour lesquelles la condition de flux à l'origine cesse d'être satisfaite à partir d'un temps fini  $T^*$ . On trouvera dans [5] une discussion plus détaillée sur ce sujet.

### 3. Idée des démonstrations.

Pour le problème stationnaire, nous démontrons uniquement la caractérisation (2.4) de l'état de Bose. Cela n'est rien d'autre que le Théorème 1, mais nous en donnons une preuve différente de celle présentée dans [1]. Les autres caractérisations énoncées dans le Théorème 2 sont démontrées dans [5].

**Lemme 1.** *Soit  $F = g + \alpha \delta_a$  tel que  $M(F) = m$  et  $\mathcal{B}_m = g_\mu + \alpha_m \delta_0$  l'état de Bose associé. Alors*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} H(F) - H(\mathcal{B}_m) &= H(g|g_\mu) - \alpha(a + \mu), \\ H(g|g_\mu) &= \int_0^\infty \left[ (k^2 + g) \ln \frac{k^2 + g}{k^2 + g_\mu} - g \ln \frac{g}{g_\mu} \right] dk. \end{aligned}$$

De plus,  $H(g|g_\mu) \leq 0$  avec égalité si, et seulement si,  $g = g_\mu$ .

Ce lemme implique, bien sûr, que pour  $F$  tel que  $M(F) = m$  et  $F \neq \mathcal{B}_m$  on a  $H(F) < H(\mathcal{B}_m)$ .

*Preuve.* On écrit

$$(3.2) \quad \begin{aligned} H(F) - H(\mathcal{B}_m) &= \int_0^\infty g \ln \frac{(k^2 + g) e^{-k}}{g} + k^2 \ln(k^2 + g) - k^2 \ln k^2 - \alpha a \\ &\quad - \int_0^\infty g_\mu \ln \frac{(k^2 + g_\mu) e^{-k}}{g_\mu} - k^2 \ln(k^2 + g_\mu) + k^2 \ln k^2. \end{aligned}$$

On remarque que  $(k^2 + g_\mu) e^{-k}/g_\mu = e^\mu$  et que

$$(3.3) \quad \int_0^\infty g_\mu \ln e^\mu = \mu [M(\mathcal{B}_m) - \alpha_m] = \mu M(F) = \int_0^\infty g \ln e^\mu + \alpha \mu.$$

En combinant (3.2) et (3.3) on obtient (3.1). De plus, la fonction  $x \mapsto (k^2 + x) \ln \frac{k^2 + x}{k^2 + y} - x \ln \frac{x}{y}$ , (à  $k$  et  $y$  fixés) admet comme unique maximum le point  $x = y$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

*Nous donnons maintenant la démonstration de la caractérisation (2.6) des états de Bose. Ce résultat sera utilisé dans la démonstration du Théorème 3.*

**Lemme 1 bis.** *Soit  $F = g + \alpha \delta_a$  tel que  $M(F) = m$  et  $D(F) = 0$ . Alors  $F$  est l'état de Bose  $\mathcal{B}_m$ .*

*Preuve du Lemme 1 bis.* Supposons donc que  $D(F) = D(g) + 2\alpha D_a g = 0$ , ce qui implique que chaque terme est nul. De  $D(g) = 0$  on tire  $g'(k^2 + g) e^{-k} = -g(k'^2 + g') e^{-k'}$  p.p.  $k, k' \geq 0$  ce qui implique clairement que  $(k^2 + g) e^{-k}/g$  est constant, et en notant  $e^\mu$  cette constante on obtient  $g = g_\mu$ . De plus,  $\mu \geq 0$  puisque  $M(g) < \infty$ . Enfin, en utilisant  $(k^2 + g_\mu) e^{-k} = g_\mu e^\mu$ :

$$\begin{aligned} \alpha D_a g_\mu &= \alpha \int_0^\infty (g'_\mu e^{-a} - (k'^2 + g'_\mu) e^{-k'}) (\ln(g'_\mu e^{-a}) - \ln(k'^2 + g'_\mu) e^{-k'}) dk' \\ &= \alpha (e^\mu - e^{-a}) (\mu + a) \int_0^\infty g_\mu dk = 0, \end{aligned}$$

ce qui a lieu si, et seulement si,  $\alpha = 0$  ou  $\mu = a = 0$ .  $\square$

Enfin le résultat suivant, permet de contrôler un moment grâce à la masse et l'entropie.

**Lemme 2.** Il existe une constante  $C_1$  telle que pour toute distribution  $F = g + \alpha \delta_a$ , on ait

$$M(kF) \leq C_1(1 + M(g) - H(F)) \quad \text{et} \quad |H(F)| \leq C_1 M((1+k)F).$$

Preuve du Lemme 2. On démontre seulement la première estimation; la seconde inégalité s'obtient de la même façon. Avec la notation  $F = g + G$  on écrit

$$(3''.1) \quad \int_0^\infty k g dk + \int_0^\infty k dG(k) = H_0(g) - H(F),$$

où on a posé

$$(3''.2) \quad H_0(g) = \int_0^\infty [(g+k^2) \ln(g+k^2) - g \ln g - k^2 \ln k^2] dk.$$

On remarque que  $0 \leq (s+k^2) \ln(s+k^2) - s \ln s - k^2 \ln k^2 \leq s \ln(1+k^2)$  pour tout  $s \geq 1$ ,  $0 \leq (s+k^2) \ln(s+k^2) - k^2 \ln k^2 \leq s$  pour tout  $s \in [0, 1]$  et  $k \geq 1$ ,  $0 \leq (s+k^2) \ln(s+k^2) - k^2 \ln k^2 \leq C_1$  pour tout  $s, k \in [0, 1]$ , de sorte que

$$(3''.3) \quad \int_0^\infty ((g+k^2) \ln(g+k^2) - k^2 \ln k^2) dk - \int_0^\infty g \ln g \mathbf{1}_{g \geq 1} dk \leq \int_0^\infty g(1 + \ln(1+k^2)) dk + C_1.$$

De plus, puisque  $s \mapsto -s \ln s$  est croissante sur  $[0, e^{-1}]$  et que  $s \mapsto -\ln s$  est décroissante, on a

$$(3''.4) \quad \begin{aligned} - \int_0^\infty g \ln g \mathbf{1}_{\{0 \leq g \leq 1\}} dk &= - \int_0^1 g \ln g \mathbf{1}_{\{0 \leq g \leq 1\}} dk \\ &\quad - \int_1^\infty g \ln g \mathbf{1}_{\{0 \leq g \leq e^{-\sqrt{k}}\}} dk - \int_1^\infty g \ln g \mathbf{1}_{\{e^{-\sqrt{k}} \leq g \leq 1\}} dk \\ &\leq C_1 + \int_1^\infty e^{-\sqrt{k}} \sqrt{k} dk + \int_1^\infty g \sqrt{k} dk \\ &\leq C_1 + C_2 + M(g) + \frac{1}{4} \int_0^\infty g k dk, \end{aligned}$$

où  $C_2 = \int_1^\infty e^{-\sqrt{k}} \sqrt{k} dk$ . En combinant (3''.1), (3''.2), (3''.3) et (3''.4) on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty k g dk + \int_0^\infty k dG(k) \leq 2C_1 + C_2 + 3M(g) - H(F).$$

□

*Démonstration du Théorème 3.* L'existence et l'unicité de la solution de (2.2) se démontre à l'aide du Théorème de point fixe de Banach dans l'espace  $C([0, T], \mathcal{E}_1)$ . Grâce à (2.3) et au Lemme 2 on peut itérer l'argument, et on obtient une solution globale de (2.2).

Soit maintenant  $T > 0$  fixé et  $(t_n)$  une suite tendant vers  $+\infty$ . Pour tout  $n \geq 0$  on définit  $F_n := F(\cdot + t_n, \cdot) \in C([0, T]; \mathcal{E}_1)$ . Il est alors simple de montrer l'existence d'une mesure  $F_\infty = g_\infty + G_\infty$  avec  $g_\infty$  régulière et  $G_\infty$  singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, telle que  $M(F_\infty) = m$  et telle que, à extraction d'une sous-suite,  $F_n \rightharpoonup F_\infty$  dans  $(C_c([0, T] \times \mathbb{R}_+))'$ . La

difficulté est d'identifier  $F_\infty$ . Supposons afin d'abrégier la présentation que  $b \equiv 1$  (le cas général est traité dans [5] et repose sur la possibilité de définir  $D(F)$  pour une mesure positive quelconque). Nous avons alors l'estimation a priori supplémentaire suivante:

**Lemme 3.** *Supposons  $b \equiv 1$ . Étant donnée  $F_{in} \in E$  et  $F = g + \alpha \delta_0$  la solution de (2.2) correspondante, il existe une fonction  $G \in L^1_{loc}(0, \infty)$  telle que*

$$(3.4) \quad g(t, k) \leq G(k) \quad \forall t, k > 0.$$

*Preuve du Lemme 3.* On écrit la formule de Duhamel pour  $g$  vérifiant la première équation du système (2.2)

$$(3'''.1) \quad g(t, k) = g_{in}(k) e^{-\Lambda(t, 0, k)} + \int_0^t k^2 e^{-k} M(F) e^{-\Lambda(t, s, k)} ds,$$

avec  $\Lambda(t, s, k) = \int_s^t [M((k^2 + F) e^{-k}) - e^{-k} M(F)] d\sigma$ . On remarque que  $-\Lambda(t, s, k)$  est une fonction décroissante en  $k$  à  $t$  et  $s$  fixés. Ainsi, pour tout  $k_0 > 0$  on a

$$M(F) \geq M(g) \geq \int_0^{k_0} k^2 e^{-k} dk M(F) \int_0^t e^{-\Lambda(t, s, k_0)} ds \quad \forall t > 0.$$

On en déduit une estimation uniforme en temps sur  $\int_0^t e^{-\Lambda(t, s, k_0)} ds$ , puis sur  $e^{-\Lambda(t, 0, k_0)}$  grâce à

$$e^{-\Lambda(t, 0, k_0)} = \int_0^1 e^{-\Lambda(s, 0, k_0)} e^{-\Lambda(t, s, k_0)} ds \leq \sup_{s \in [0, 1]} e^{-\Lambda(s, 0, k_0)} \int_0^t e^{-\Lambda(t, s, k_0)} ds,$$

pour tout  $t \geq 1$ , et enfin  $g(t, k)$  en revenant à l'équation (3'''.1). □

*Retour à la démonstration du Théorème 3.* De la borne (3.4) on déduit que  $g_n$  est faiblement convergente dans  $L^1$  (en dehors éventuellement de l'origine), et que donc  $G_\infty = \alpha_\infty \delta_0$  et  $F_\infty \in L^\infty(0, T; \mathcal{E}_1)$ . On montre alors, par s.c.i. de  $D$  dans  $L^1(k_0, \infty)$  faible pour tout  $k_0 > 0$ , que  $D(g_\infty) = 0$ . Le Théorème 2 (et plus précisément, la première partie de la preuve du Lemme 1 bis) implique que  $g_\infty = g_\mu$  avec  $\mu$  tel que  $N_{\mu(t)} + \alpha_\infty(t) = m \quad \forall t \in [0, T]$ . En passant à la limite dans le système (2.2) on obtient, en utilisant la forme particulière de  $g_\infty$ ,

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_\infty = \frac{\partial g_\mu}{\mu} \dot{\mu} = Q(g_\infty, g_\infty) + \alpha_\infty [(k^2 + g_\infty) e^{-k} - g_\infty] = \alpha_\infty g_\mu (e^\mu - 1) \\ \dot{\alpha}_\infty = \alpha_\infty (L(g_\infty) - L((k^2 + g_\infty) e^{-k})) = -\alpha_\infty (e^\mu - 1). \end{cases}$$

De la première équation, on déduit  $\dot{\mu} e^{k+\mu} = -\alpha_\infty (e^\mu - 1) (e^{k+\mu} - 1)$  et donc  $(\dot{\mu} + \alpha_\infty (e^\mu - 1)) e^{k+\mu} = \alpha_\infty (e^\mu - 1) \quad \forall k \geq 0$ . Comme le membre de droite est indépendant de  $k$  il vient  $\alpha_\infty(t) = 0$  ou  $\mu(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Ainsi, en revenant au système (3.5), on voit que  $\alpha_\infty$  et  $\mu$  sont des constantes, et donc  $F_\infty = \mathcal{B}_m$ . Finalement, la convergence "forte" énoncée dans le Théorème 3 s'obtient de manière assez standard et nous renvoyons encore une fois à [5] pour la démonstration. □

**Références.**

- [1] R.E. Caflisch, C.D. Levermore, *Equilibrium for radiation in a homogeneous plasma*, Phys. Fluids **29** (1986) 748-752.
- [2] G. Cooper, *Compton Fokker-Planck equation for hot plasmas*, Phys. Rev. D **3** (1974) 2312-2316.
- [3] H. Dreicer, *Kinetic Theory of an Electron-Photon Gas*, Phys. Fluids **7** (1964) 735-753.
- [4] M. Escobedo, M.A. Herero, J.J.L. Velazquez, *A nonlinear Fokker-Planck equation modelling the approach to thermal equilibrium in a homogeneous plasma*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998) 3837-3901.
- [5] M. Escobedo, S. Mischler, article en préparation.
- [6] A.S. Kompaneets, *The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons*, Soviet Physics JETP **4** (1957) 730-737.