Université Paris-Dauphine **2009-2010**
Cours de "Processus Continus Approfondis" Mai 2010

CHAPITRE 0 - INTRODUCTION, RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1 Introduction.

Le cours est composé de quatre chapitres:

Chapitre 1. Le mouvement Brownien.

Chapitre 2. Intégrale et équation différentielle stochastique brownienne.

Chapitre 3. Le processus de Poisson.

Chapitre 4. Processus de Markov en temps continu.

L'objectif du cours est multiple.
- Présenter et commencer l'étude des deux processus les plus importants en probabilité: le mouvement brownien et le processus de Poisson. Parfois, on présentera des résultats valables dans un cadre plus vaste (les processus PAIScàd) par souci de généralité et d'efficacité (cela permettra de ne pas répéter deux fois les résultats et leur démonstration!).
- L'intégrale stochastique brownienne et les équations différentielles stochastiques browniennes qui permettent de construire des classes de processus à partir du mouvement brownien plus généraux que celui-ci, ces processus (appelés processus de diffusion) interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, sociologiques, financiers ...
- Faire une brève introduction aux processus de Markov en temps continu, en présentant quelques résultats généraux et en abordant les deux grandes classes de processus de Markov: les processus de diffusion (construit encore une fois à partir du mouvement brownien) et les processus de Markov à sauts purs (appelés également chaînes de Markov en temps continus et qui se construisent à partir du processus de Poisson).
- revenir sur les notions de filtration, temps d'arrêt, martingale, propriété de Markov, qui sont des notions et des outils importants dans l'étude des processus stochastique.

Il n'est pas inutile de retenir que schématiquement on a deux niveaux de processus et de compléxité:
- les plus "simples" les PAIScàd (qui sont des processus de Markov homogènes en temps et en "espace"), ce sont en particulier les "marches aléatoires" en temps discret (cf. cours de Licence et de Master 1 premier semestre), le mouvement brownien, le processus de Poisson, les processus de Lévy (cf. cours de niveau Master 2);
- les processus de Markov généraux (en fait toujours homogènes en temps), ce sont en particulier les "chaînes de Markov" en temps discret (cf. cours de Master 1 premier semestre), les processus de diffusion et les processus de Markov à sauts purs.

2 Tribu engendrée et indépendance.

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ et des variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Définition 2.1 *On dit que deux événements B, $C \in \mathscr{A}$ sont indépendants, on note $B \perp\!\!\!\perp C$, si $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)$. On dit que deux sous-tribus $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathscr{A}$ sont indépendantes, on note $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

$$\begin{array}{lll} (i) & \forall\, B \in \mathcal{B},\ \forall\, C \in \mathcal{C} & \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C) \\ (ii) & \forall\, X \in L^\infty(\mathcal{B}),\ Y \in L^\infty(\mathcal{C}) & \mathbf{E}(X\,Y) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y). \end{array}$$

Plus généralement, on dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements, $A_i \in \mathscr{A}$, $i \in I$, sont indépendants si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on a

$$\mathbf{P}(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j).$$

On dit qu'une famille $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$ sont indépendantes si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

$$\begin{array}{llll} (i) & \forall\, J \subset I \text{ fini} & \forall B_j \in \mathcal{B}_j & \mathbf{P}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(B_j) \\ (ii) & \forall\, J \subset I \text{ fini} & \forall X_j \in L^\infty(\mathcal{B}_j) & \mathbf{E}(\bigcap_{j \in J} X_j) = \prod_{j \in J} \mathbf{E}(X_j). \end{array}$$

Définition 2.2 *- Etant donnée une va X on définit la tribu engendrée par X, notée $\sigma(X)$, comme étant la plus petite tribu qui rend mesurable X, c'est-à-dire, qui contient tous les événements $X^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{E}$.*

- Etant donnée une famille de sous-tribus $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ (resp. une famille de va $(X_i)_{i \in I}$) on définit la tribu engendrée par $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$, notée $\vee(\mathscr{A}_i, i \in I)$, (resp. la tribu engendrée par $(X_i)_{i \in I}$, notée $\sigma(X_i, i \in I)$) comme étant la plus petite tribu qui contient tous les $\mathscr{A}_i$ (resp. qui contient tous les $\sigma(X_i)$, c'est à dire qui rend mesurable tous les X_i, $i \in I$, ou encore qui contient tous les événements $X_i^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{E}$, $i \in I$).

Définition 2.3 *On dit qu'une va X $\mathscr{A}$-mesurable est indépendante d'un événement $B \in \mathscr{A}$, on note $X \perp\!\!\!\perp B$, (resp. d'une sous-tribu $\mathcal{B} \subset \mathscr{A}$, on note $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$, resp. d'une va Y $\mathscr{A}$-mesurable, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$) si la tribu $\sigma(X)$ est indépendante de l'événement $B \in \mathscr{A}$ (resp. de la sous-tribu $\mathcal{B}$, resp. de la sous-tribu $\sigma(Y)$).*

Lemme 2.4 (classe monotone). *Soient $\mathscr{A}_i$, $i \in I$, et $\mathcal{B}$ des sous-tribus de $\mathscr{A}$. On a*

$$\vee\{\mathscr{A}_i,\ i \in I\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{B} \quad \text{si, et seulement si} \quad \forall\, J \subset I \text{ fini},\ \vee\{\mathscr{A}_j,\ j \in J\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}.$$

En particulier, une va X est indépendante d'une famille de va $(X_i)_{i \in I}$ si, et seulement si

- $\mathbf{E}(f(X)\,g(X_1, \ldots X_n)) = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(X_1, \ldots, X_n))$ *pour toutes fonctions de L^0_+;*
- $\mathbf{E}(f(X)\,g_1(X_1) \ldots g_n(X_n)) = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g_1(X_1) \ldots g_n(X_n))$ *pour toutes fonctions de L^0_+;*

ou

- $\forall\, A \in \sigma(X)$, $A_1 \in \sigma(X_{i_1})$, $\ldots$, $A_n \in \sigma(X_{i_n})$ $\quad \mathbf{P}(A \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

Présentons une application immédiate mais fondamentale pour les PAI.

Théorème 2.5 *Soient n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) Les va $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes;

(ii) La loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ est le produit des lois de X_1, ..., X_n:

$$P^{(X_1,\dots,X_n)} = P^{X_1} \otimes \dots \otimes P^{X_n};$$

(iii) Il existe $p_1(dx_1), ..., p_n(dx_n)$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ telles que

$$P^{(X_1,\dots,X_n)}(dx_1, ..., dx_n) = p_1(dx_1) \dots p_n(dx_n),$$

et alors $\mathcal{L}(X_i) = p_i$ pour tout $1 \le i \le n$ (ici $\mathcal{L}(X_i)$ désigne la loi de X_i);
(iv) Pour toutes fonctions $f_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ou $f_i \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ou $f_i \in L^0_+(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathbf{E}(\prod_{j=1}^n f_j(X_j)) = \prod_{j=1}^n \mathbf{E}(f_j(X_j));$$

(v) Pour tous les vecteurs $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^d$, et en notant $X = (X_1, ..., X_n)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, on a

$$\mathbf{E}(e^{-i\,X\cdot\xi}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(e^{-i\,X_k\cdot\xi_k}).$$

3 Fonction caractéristique et convergences.

Théorème 3.6 *Soit X un vecteur aléatoire. La fonction caractéristique "caractérise" un vecteur aléatoire. Si $\Phi_X(\xi) = \hat{\mu}$ alors $X \sim \mu$ avec*

$$\Phi_X(\xi) := \mathbf{E}(e^{i\,X\cdot\xi}).$$

Théorème 3.7 *Soit (X_n) une suite de va et $a \in E$. Alors*

$$(X_n \;\to\; a \text{ en loi}) \quad \text{implique} \quad (X_n \;\to\; a \text{ p.s.}).$$

4 Variables gaussiennes.

Voir également le premier chapitre "Vecteurs et Processus Gaussiens" (sections 1, 2 et 3) de [LeG2].

Définition 4.8 - *Un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^k$ est gaussien si*

$$\forall\, u_j \in \mathbb{R},\ 1 \le j \le k, \quad \text{la va réelle} \quad \sum u_j\, X_j \quad \text{est gaussiennne},$$

c'est-à-dire suit une loi réelle

$$\delta_{m_u}(dx) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u}} e^{-\frac{(x-m_u)^2}{2\,\sigma_u}}\, dx,$$

avec $m_u \in \mathbb{R}$ et $\sigma_u > 0$.
- Une définition équivalente (excepté qu'elle ne prend pas en compte les masses de Dirac) est de dire qu'un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^k$ est gaussien si sa loi μ est une "distribution" gaussienne, c'est-à-dire si $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x)\, dx$ pour tout A borélien de $\mathbb{R}^k$ et

$$g(x) = g_{C,x_0}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\,(x-x_0)\cdot C^{-1}(x-x_0)}}{(2\pi)^{k/2}\,\sqrt{det C}}.$$

Ici $x_0 \in \mathbb{R}^k$ est la valeur moyenne de X et C est une matrice définie positive, dite matrice de covariance. Cette loi est notée $\mathcal{N}(x_0, C)$
- On appelle matrice de covariance d'un vecteur gaussien la matrice symétrique réelle $A_X = A$ définie par

$$A_{jk} := \mathbf{E}[(X_j - \mathbf{E}(X_j))\,(X_k - \mathbf{E}(X_k)].$$

Attention, on définit habituellement la variance d'une va réelle par

$$\mathrm{Var}(X) = V(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2),$$

que l'on note $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$. Ici on a pris une convention différente (σ_u correspond à la "température") de sorte que pour une gaussienne centrée $\mathbf{E}(X^2) = \sigma_X$.

On rappelle le résultat fondamental suivant concernant les vecteurs gaussiens.

Théorème 4.9 *Soit X un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que les coordonnées X^k, $1 \le k \le d$, sont des var gaussiennes $\mathcal{N}(m^k, \sigma^k)$ et indépendantes. Alors X est un vecteur gaussien.*

Théorème 4.10 *Soit X un vecteur gaussien (centré pour simplifier). La matrice de covariance caractérise la loi de X, on note $X \sim \mathcal{N}_k(0, A)$. Cela signifie que si pour X et Y gaussien on a $X \sim Y$ si, et seulement si, $A_X = A_Y$. Si $X \sim \mathcal{N}_k(0, A)$ on a*

$$\forall\, u_j \in \mathbb{R} \quad \textit{la va réelle} \quad \sum u_j\, X_j \;\sim\; \mathcal{N}_1(0, u \cdot A\, u).$$

Corollaire 4.11 *Soit k va centrée X_1, ..., X_1 telles que $X = (X_1, ..., X_k)$ est un vecteur gaussien. Il y a équivalence entre*

(i) Les va X_i sont indépendantes;

(ii) Les va X_i sont orthogonales: $\mathbf{E}(X_i\, X_j) = 0$ si $i \ne j$;

(iii) La matrice de covariance est diagonale.

Preuve de la Proposition 4.11. Le sens direct est clair. Réciproquement, on a

$$E(e^{i\, X \cdot u}) = e^{-\, E((X \cdot u)^2)/2}$$

puisque $X \cdot u$ est une var gaussienne centrée et que la transformée de Fourier d'une variable gaussienne est une gaussienne d'écart type sa variance. Or, par hypothèse,

$$E((X \cdot u)^2) = E\left(\sum_{jk} X_j\, u_j\, X_k\, u_k\right) = \sum_j u_j^2\, E(X_j^2) = \sum_j u_j^2\, \sigma_j.$$

On en déduit

$$E(e^{i\, X \cdot u}) = e^{-\sum_j u_j^2\, \sigma_j/2} = \prod_j e^{-u_j^2\, \sigma_j/2} = \prod_j E(e^{i\, X_j\, u_j}),$$

et on conclut grâce au théorème 2.5. ◫

Proposition 4.12 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs gaussiens et $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel engendré par ceux-ci. Alors tout vecteur $Y \in \mathcal{H}$ est un vecteur gaussien.*

Proposition 4.13 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires (réelles) gaussiennes telle que X_n soit de loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ et X_n converge en loi vers X. Alors*

a) - La var X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = \lim m_n$, $\sigma = \lim \sigma_n$.

b) - Si la suite (X_n) converge en probabilité vers X alors la convergence a lieu dans tous les espaces L^p, $1 \le p < \infty$.

Preuve de la Proposition 4.13. Par hypothèse on a $\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ où μ_n (resp. μ) désigne la loi de X_n (resp. X) (ou seulement $\langle \mu_n, \varphi \rangle \to \langle \mu_n, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ puisque μ_n et μ sont des mesures de probabilité). On remarque que (σ_n) est bornée. Sinon, pour une sous-suite $\sigma_{n'} \to \infty$, ce qui implique $\langle \mu_{n'}, \varphi \rangle \to 0$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, et donc $\mu \equiv 0$, ce qui est absurde. De la même manière (m_n) est bornée. Maintenant, il existe une sous-suite telle que $(\sigma_{n'}, m_{n'}) \to (\sigma, m)$ et donc $\mu_{n'}$ converge faiblement vers la gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Ainsi $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ et c'est toute la suite (σ_n, m_n) qui converge.
De plus, pour tout $q < \infty$ on a

$$\mathbf{E}(|X|^q) = \int_{\mathbb{R}} |x|^q \, e^{\frac{-(x-m_n)^2}{2\,\sigma_n}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} = \sigma_n^{q/2} \int_{\mathbb{R}} |y|^q \, e^{\frac{-y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \le C < \infty,$$

et l'on déduit que $X_n \to X$ dans L^p, $1 \le p < q$, si $X_n \to X$ en probabilité puisqu'alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) &= \mathbf{E}(|X_n - X|^p \, \mathbf{1}_{|X_n - X| \ge \varepsilon}) + \mathbf{E}(|X_n - X|^p \, \mathbf{1}_{|X_n - X| \le \varepsilon}) \\ &\le \mathbf{E}(|X_n - X|^q)^{1/r} \, \mathbf{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| \ge \varepsilon})^{1/r'} + \varepsilon^p \\ &\le \{2^{q/r} \sup_n \mathbf{E}(|X_n|^q + |X|^q)^{1/r}\} \, \mathbf{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon)^{1/r'} + \varepsilon^p, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Holder avec $r = p/q$ pour traiter le premier terme. ◻

5 Conditionnement.

Théorème 5.14 *Soit $\mathcal{B} \subset \mathscr{A}$ et X une va (positive ou intégrable). Il existe une va Y (positive ou intégrable) $\mathcal{B}$-mesurable, notée $Y = \mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ et appellée espérance conditionnelle de X par rapport à la sous-tribu $\mathcal{B}$, telle que*

$$\mathbf{E}(Y\,Z) = \mathbf{E}(X\,Z) \qquad \forall\, Z \ \mathcal{B}\text{-mesurable, ou } \forall\, Z = \mathbf{1}_B, \ B \in \mathcal{B}.$$

Si $X \in L^2(\Omega)$ alors $\mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X) \in L^2(\Omega)$ est la solution du problème de minimisation

$$\mathbf{E}((\mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X) - X)^2) = \min_{Z \in L^2(\mathcal{B})} \mathbf{E}((Z - X)^2).$$

Les principales propriétés de l'espérance conditionnelle sont résumées ci-dessous

Théorème 5.15 *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathscr{A}$ et X, Y des va (positives ou intégrables). Alors*

- $\mathbf{E}(\lambda\, X + Y|\mathcal{B}) = \lambda\, \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) + \mathbf{E}(Y|\mathcal{B});$ (5.1)
- $X \le Y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X) \le \mathbf{E}^{\mathcal{B}}(Y);$ (5.2)

- $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X), \quad \mathbf{E}(1|\mathcal{B}) = 1;$ (5.3)
- $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$ *si* $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{B};$ (5.4)
- $\mathbf{E}(X\,Y|\mathcal{B}) = Y\,\mathbf{E}(X|\mathcal{B}), \ \mathbf{E}(Y|\mathcal{B}) = Y$ *si* Y *est* $\mathcal{B}$*-mesurable*; (5.5)
- $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C})$ *si* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B};$ (5.6)

- $\phi(\mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X)) \le \mathbf{E}^{\mathcal{B}}(\phi(X))$ *si ϕ est une fonction convexe,* (5.7)

  ce qui implique $|\mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X)|^p \le \mathbf{E}^{\mathcal{B}}(|X|^p)$ *et* $\mathbf{E}^{\mathcal{B}}(X) \in L^p$ *si* $X \in L^p$; (5.8)
- $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{B}) \to \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ *en norme* L^p *si* $X_n \to X$ *en norme* L^p; (5.9)

- $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{B}) \nearrow \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ *si* $X_n \nearrow X$ *p.s.*; (5.10)
- $\mathbf{E}(\liminf X_n|\mathcal{B}) \le \liminf \mathbf{E}(X_n|\mathcal{B})$ *si* $X_n \ge 0;$ (5.11)
- $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{B}) \to \mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ *p.s. et* L^1 *si* $X_n \to X$ *p.s. et* $|X_n| \le Z \in L^1$. (5.12)

6 Densité et convergence.

On utilise à plusieurs reprises le fait que si une propriété est vraie pour toute fonction de la forme

$$\exp\left(i\,\lambda\,X\right)$$

ou pour toutes fonctions de la forme

$$\exp\left[i\left(\lambda_1\,X_1+...+\lambda_k\,X_k\right)\right]$$

alors la propriété est vraie pour toute fonction $\sigma(X)$-mesurable ou pour toute fonction $\sigma(X_1,...,X_k)$-mesurable.

Lemme 6.16 *A) - Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable. Si ϕ_n est une suite de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables qui converge ponctuellement vers une fonction ϕ, alors ϕ est $\mathcal{E}$-mesurable.*

B) - Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré. Pour tout $1\le p\le\infty$, l'espace $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$ est un espace de Banach, l'espace $L^2(E,\mathcal{E},\mu)$ est un espace de Hilbert. Insistons, si ϕ_n est une suite de Cauchy de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$, il existe $\phi\in L^p(E,\mathcal{E},\mu)$ telle que $\phi_n\to\phi$ dans $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$.

Eléments de la preuve du Lemme 6.16. Preuve de B. La preuve suit le schéma suivant (ici $p=1$):

(i) Si $\sum_k\|f_k\|_{L^1}<\infty$ alors il existe $N\in\mathcal{E}$ tel que $g(x):=\sum_k|f_k(x)|<\infty\ \forall\,x\in N^c$ et donc $f(x):=\sum_k f_k(x)$ existe $\forall\,x\in N^c$.

(ii) Si (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans L^1, on construit une suite (n_k) temme que $f_k:=\phi_{n_{k+1}}-\phi_{n_k}$ vérifie le critère de sommation des normes du point (i).

(iii) On a donc $\phi_{n_{k+1}}(x)-\phi_{n_0}(x)=\sum_{\ell=1}^k f_\ell(x)\to f(x)\ \forall\,x\in N^c$, d'où $\phi_{n_{k+1}}(x)\to\phi(x):=f(x)+\phi_{n_0}(x)$ $\forall\,x\in N^c$, et en posant $\phi(x)=0$ si $x\in N$, on a bien ϕ est $\mathcal{E}$-mesurable.

(iv) Par un théorème de convergence (théorème de convergence dominée qui fait intervenir la fonction g du point (i)) on en déduit $\phi_{n_k}\to\phi$ dans L^1, et finalement c'est toute la suite qui converge: $\phi_n\to\phi$ dans L^1. ◫

Lemme 6.17 *Soit $(E,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré σ-fini et soit $\mathcal{E}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.*
C1) - Si ϕ_n est une suite de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$, $\phi\in L^p(E,\mathcal{F},\mu)$ et $\phi_n\to\phi$ dans $L^p(E,\mathcal{F},\mu)$, alors il existe $\phi^*\in L^p(E,\mathcal{E},\mu)$ vérifiant $\phi=\phi^*$ pour μ presque tout élément de E, autrement dit, $\phi_n\to\phi^*$ dans $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$.

C2) - Si ϕ_n est une suite de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables qui converge p.s. (au sens de $\mathcal{F}$) vers une fonction ϕ, alors il existe ϕ^* qui est $\mathcal{E}$-mesurable et qui vérifie $\phi=\phi^*$ pour μ presque tout élément de E.

Le point essentiel en théorie des processus est que la limite ϕ est $\mathcal{E}$-mesurable.

Preuve du Lemme 6.17. La preuve de C1 consiste juste à dire que (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $L^p(E,\mathcal{F},\mu)$, donc dans $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$, donc converge vers une limite ϕ^* dans $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$, donc converge vers cette même limite dans $L^p(E,\mathcal{F},\mu)$.

Preuve de C2. On suppose $\mu(E)<\infty$ pour simplifier. On introduit $\beta(s):=\arctan(s)$ qui est une fonction continue, bijective et bornée. On définit $\psi_n:=\beta(\phi_n)$. Par hypothèse $\psi_n\to\psi:=\beta(\phi)$ p.s. (ce qui signifie qu'il existe $N\subset\mathcal{F}$ tel que $\psi_n\to\psi$ ponctuellement sur N^c et $\mu(N)=0$). Comme de plus (ψ_n) est bornée et μ est une mesure finie, le théorème de convergence dominée implique que (ψ_n) converge vers ψ dans $L^1(E,\mathcal{F},\mu)$. Or d'après l'étape C1, cela implique qu'il existe ψ^* tel que $\psi^*\in L^1(E,\mathcal{E},\mu)$, $\psi^*=\psi$ μ-pp dans $(E,\mathcal{F})$. On en déduit que $\phi^*:=\beta^{-1}(\psi)$ est $\mathcal{E}$-mesurable et $\phi^*=\phi$ μ-pp dans $(E,\mathcal{F})$. ◫

Lemme 6.18 *Soit $(E,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré σ-fini et soit $\mathcal{E}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E}$ contient les négligeables de $\mathcal{F}$. Soit $(\phi)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{E}$-mesurables. Si ϕ_n converge vers ϕ au sens ps de $\mathcal{F}$ ou au sens $L^p(E,\mathcal{F},\mu)$ alors ϕ est $\mathcal{E}$-mesurable.*

Preuve du Lemme 6.18. Par le lemme 6.17 on sait qu'il existe ϕ^* tel que ϕ^* est $\mathcal{E}$-mesurable et $\phi^* = \phi$ μ-pp. Ainsi, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $\phi = \phi^*$ sur A^c. Cela implique que $A \in \mathcal{E}$ et que ϕ est $\mathcal{E}$-mesurable puisque pour tout borélien B on a

$$\{\phi \in B\} = \{\phi^* \mathbf{1}_{A^c} \in B\} \cup \{\phi \mathbf{1}_A \in B\},$$

les deux ensembles appartenant à $\mathcal{E}$. ◫

Corollaire 6.19 *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilté et soit* $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ *une filtration qui vérifie les "hypothèses habituelles":*

$$((\mathcal{F}_t \text{ est càd},)) \quad \mathcal{F}_t \text{ contient les négligeables de } \mathscr{A}.$$

Soit (X^n) *une suite de processus progressivement mesurables qui converge (ps ou* L^p *dans* $([0,T] \times \Omega; \mathcal{B}(0,T) \otimes \mathscr{A}, d\lambda(t) \otimes d\mathbf{P})$*) vers un processus* X*. Alors* X *est un processus progressivement mesurable.*

Preuve du Lemme 6.19. Pour tout $t \in [0,T]$ on a $X^n|_{[0,t]\times\Omega}$ est $\mathcal{B}(0,t) \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable et le lemme 6.18 implique que $X|_{[0,t]\times\Omega}$ est également $\mathcal{B}(0,t) \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable. ◫

Bibliographie.

[LeG2] J.-F. Legall, *Mouvement brownien et calcul stochastique*, chapitre 1, cours de M2R téléchargeable, Laboratoire de Probabilité, UPMC, 1996